EDN ZUZYRJ DOI 10.5281/zenodo.19201750
УДК 007.52

# СТАБИЛИЗАЦИЯ ПОЛОЖЕНИЯ КОЛЕСНОГО ПРЫГАЮЩЕГО РОБОТА

**© 2026** ***Зуев В.М., Первенко Д.А., Ниценко А.В.***

В данной работе приведены описания стабилизации положения колесного прыгающего робота методом линейно-квадратичного регулирования. Показано, что метод линейно-квадратичного регулирования можно модифицировать так, что он будет самонастраивающимся на заданное целевое положение. Это делает возможным стабилизацию положения в более широком диапазоне воздействий, более устойчивой к внешним факторам и не требует, в отличие от пропорционально-интегрально-дифференцирующего метода, перенастройки робота в процессе изменения параметров системы.

***Ключевые слова:*** робот, прыгающий, колесный, стабилизация.

**Введение.** В настоящее время становятся популярными колесные прыгающие роботы [1-5]. В сравнении с другими они имеют минимальные затраты на перемещение. Одной из проблем таких роботов является стабилизация его равновесия. В статье [6] рассматривались основные методы кинематики и динамики колесного прыгающего робота. В настоящей статье предлагается более устойчивая версия метода стабилизации линейно-квадратичного регулирования.

**Механизм стабилизации**. Цель: стабилизировать вертикальное положение робота, точнее: стержня, на котором расположены все исполнительные механизмы. Технически проблема решается, если установить управляемый двигатель на малой шестерне [6], который может прикладывать момент между шестерней и стержнем. На при этом связи становятся более сложными. Настоящая статья раскрывает проблему и предлагает свой вариант решения.

Кинематическая система колесного прыгающего робота изображена на рис. 1. Принципиальным отличием от робота [6] является то, что здесь добавлен полезный груз C, закреплённый на длинной штанге $L=BC$.

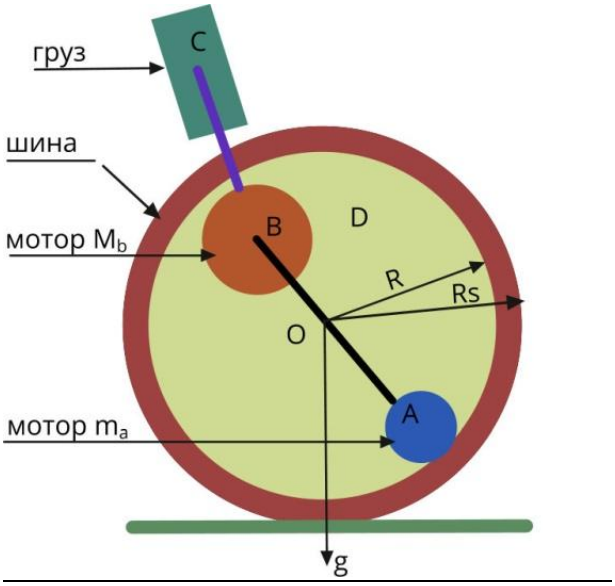


Рис. 1. Кинематическая система колесного прыгающего робота

В [7] это штанга представляет собой пятизвенный манипулятор. Из-за этого, вес и момент инерции системы в процессе работы могут изменяться в широких пределах. В точке В размещен двигатель $M_b$, в задачи которого входят стабилизация положения всей системы, подъем-опускание центра тяжести и осуществление прыжков. Штанга $L$ жестко закреплена на статоре двигателя $M_b$. Рычаг $AB$ концом В жестко соединен с ротором двигателя $M_b$, а концом А жестко соединен со статором двигателя $m_a$, основной задачей которого является качение устройства по земле. Момент двигателя $m_a$ передаётся шине колеса через зубчатое колесо А на внутренний зубчатый обод шины. В отличие от [6] мы разрываем связь: стержень $AB$ и шестерня соединены через управляемый привод (мотор). Обновлённая физическая модель такова: $\theta$ - угол положения центра малой шестерни относительно центра желоба, $\varphi$ - угол поворота малой шестерни, $\psi$ - угол стержня с грузом относительно горизонтали (инерциальная система).

Важно, что формула связи (1), полученная в [6], остаётся справедливой и в этом случае:

$$x = (R - r)\theta - r\varphi. \tag{1}$$

Но теперь нет жёсткой связи между $\varphi$ и $\psi$, так как между ними – двигатель, который может создавать управляющий момент $\tau(t)$.

Целью является стабилизация стержня, удерживающего полезную массу, в любом заданном положении. Но, не уменьшая общности, достаточно показать стабилизацию в вертикальном положении $\psi = \pi/2$ (от горизонтали). Это положение неустойчивого равновесия, как перевёрнутый маятник [7-9].

Для возможности стабилизации равновесия (перевёрнутого маятника), необходимы: двигатель, способный прикладывать нужный момент; датчики для измерения (θ φ $\dot{\theta}$ $\dot{\varphi}$) и т. д.) и реализован закон управления (например, пропорционально-интегрально-дифференцирующем (ПИД) или пропорционально-интегрально-дифференцирующем (ЛКР) регуляторе). Фактически, двигатель даёт внутреннюю степень свободы управления, которой достаточно для стабилизации.

Доказать, что такая система может [10-11] обеспечить нужную стабилизацию положения достаточно просто. Надо рассчитать прямой момент на стержень (упрощённо). Если считать, что двигатель прикладывает момент $\tau(t)$ к стержню, то уравнение для $\psi$ будет:

$$I_{eff}\ddot{\psi} - mgL\cos\psi = \tau,$$

где $I_{eff}$ – эффективный момент инерции (включая связь с движением колеса).

Для малых отклонений от вертикали δ вверх: $\psi = \frac{\pi}{2} + \delta$, $\cos\psi \approx -\delta$, тогда:

$$I_{eff}\ddot{\delta} + mgL\delta = \tau.$$

Это неустойчивая система (знак «+»), но с управлением ПИД $\tau = -k_p\delta - k_d\dot{\delta}$ получаем:

$$I_{eff}\ddot{\delta}+k_d\dot{\delta}+\left(k_p-mgL\right)\delta=\tau\ .$$

Если выбрать $k_p>mgL$, система становится асимптотически устойчивой.

Но гораздо интереснее рассмотреть полную нелинейная модель с ЛКР и обратной связью по причине того, что именно такая модель имеет преимущество перед остальными известными. Линеаризуем систему около $\psi=\frac{\pi}{2}$, $\theta=0$, $\dot{\psi}=\dot{\theta}=0$. Получим линейную систему типа: $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$, где $u=\tau$.

Получим уравнение движения и уравнение стабилизации из уравнений Лагранжа. Для этого надо найти кинетическую и потенциальную энергию груза. Положение груза:

$$\begin{cases} X=x+\left(R-r\sin\theta+L\cos\psi\right) \\ Y=-\left(R-r\right)\cos\theta+L\sin\psi \end{cases}.$$

Скорость груза:

$$\dot{X}=\dot{x}+\left(R-r\right)\dot{\theta}\cos\theta-L\psi\sin\psi\ ,$$

$$\dot{Y}=\left(R-r\right)\theta\sin\theta+L\psi\cos\psi\ .$$

Кинетическая энергия колеса: $T_{ж}=M\dot{x}^2$, где $\dot{x}=\left(R-r\right)\dot{\theta}-r\dot{\varphi}$. Теперь кинетическая и потенциальные энергии вращающихся шестерен вращающиеся части: малая шестерня (массой пренебрегаем, но учитываем её инерцию через $\varphi$, фактически, если масса мала, можно считать, что двигатель напрямую управляет $\psi$, а $\varphi$ определяется из связи с $x$. Главное упрощение: считаем массу и инерцию малой шестерни пренебрежимо малы. Тогда уравнение для $\varphi$ исчезает и связь $x=\left(R-r\right)\theta-r\varphi$ позволяет всё выразить через $\varphi$, но если шестерня невесома, то момент $\tau$ напрямую управляет стержнем, а реакция передаётся через зубчатое зацепление на колесо. В этом приближении система имеет две обобщённые координаты: $\theta$ и $\psi$, и один управляющий вход $\tau$. Это корректно, если двигатель установлен на оси шестерни, и шестерня есть просто передаточный элемент.

Получим уравнения движения с управлением. За обобщённые координаты принимаем: $q_1=\theta$, $q_2=\psi$. Лагранжиан системы:

$$L=M\dot{x}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2+\dot{Y}^2\right)-U\ .$$

В уравнение Лагранжа необходимо добавить обобщённые силы: для $\theta$ $Q_\theta=0$ (так как нет активного управления), для $\psi$ $Q_\psi=\tau$ (имеется управляющий момент).

После простых, но громоздких вычислений получаем систему:

$$\mathbf{M}\left(\theta,\psi\right)\begin{bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\psi}\end{bmatrix}+\mathbf{h}\left(\theta,\psi,\dot{\theta},\dot{\psi}\right)=\begin{bmatrix}0\\ \tau\end{bmatrix}+\mathbf{G}\left(\theta,\psi\right),$$

где $\mathbf{G}$ учитывает гравитацию:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -mg\left(R-r\right)\sin\theta \\ mgL\cos\psi \end{bmatrix}.$$

Линеаризация около точки желаемой стабилизации $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\theta - 0$. Пусть: $\psi = \frac{\pi}{2} + \delta$, $\delta \ll 1$ является отклонением от вертикали вверх, $\theta \ll 1$, $\dot{\theta} \ll 1$, $\dot{\delta} \ll 1$. Тогда: $\cos\psi \approx -\delta$, $\sin\psi \approx 1$, $\sin\theta \approx 0$, $\cos\theta \approx 1$

После линеаризации (подробности опускаем для краткости) получаем:

$$A_{11}\ddot{\theta} + A_{12}\ddot{\delta} = -mg\left(R-r\right)\theta;$$

$$A_{21}\ddot{\theta} + A_{22}\ddot{\delta} = -mgL\delta + \tau,$$

где коэффициенты $A_{ij}$ - константы (зависят только от *M, m, R, r, L*).

Это линейная система вида:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{K}\mathbf{q} + \mathbf{B}\tau. \tag{2}$$

Как известно [12-15], метод линейно-квадратичного регулирования (ЛКР) — это оптимальный метод синтеза линейного регулятора с обратной связью, который минимизирует заданный квадратичный критерий качества, балансируя между отклонением от цели (например, углами) и затратами управления (момент, энергия двигателя). В сравнении с пропорционально-интегрально-дифференцирующем (ПИД) регулятором [6] имеет автоматическую настройку через матрицы Q, R, достигает оптимальности минимизируя заданный функционал, естественно работает с векторами, учитывает полную динамику системы, имеет хорошую робастность при правильном выборе Q, R. То-есть даёт наилучший (в смысле заданного критерия) линейный закон управления для линейной системы.

Для линейной системы:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u. \tag{3}$$

ЛКР находит управление:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x}, \tag{4}$$

где $\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P}$, а $\mathbf{P}$ - решение уравнения Риккати:

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{T}\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}. \tag{5}$$

В (5):

- $\mathbf{Q} \gg 0$ - веса на состояния (насколько важно их минимизировать),
- R>0 - вес на управление (насколько «дорого» использовать u).

В нашем случае вектор состояния:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta \\ \delta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\delta} \end{bmatrix} \quad u = \tau. \tag{6}$$

Цель: $\mathbf{x} \to \mathbf{0}$. Из полной нелинейной модели (8) после линеаризации получаем:

$$\ddot{\theta} = a_{11}\theta + a_{12}\delta + b_1\tau \,. \tag{7}$$

$$\ddot{\delta} = a_{11}\theta + a_{12}\delta + b_2\tau \,. \tag{8}$$

Перепишем в форме пространства состояний:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \,. \tag{9}$$

В реальной робототехнической системе параметры *(M, m, R, r, L, g)* известны из конструкции, вектор **x** известен от датчиков (акселерометр, гироскоп и т. п.) Коэффициенты $a_{ij}$, $b_i$ зависят от параметров *(M, m, R, r, L, g)*. Их можно вычислить аналитически и, если механическая конфигурация робота не претерпевает существенных изменений в процессе его работы, то это хорошее решение. В противном случае надо иметь набор коэффициентов для каждой конфигурации или иметь датчики положения всех деталей робота и на основании этого пересчитывать модель в ходе работы. Здесь предлагается создавать искусственный тестирующий импульс, воздействующий на систему и по импульсной переходной характеристике получить коэффициенты $a_{ij}$, $b_i$ или численно через частные производные. Тестирующий импульс должен быть достаточно мал, чтобы он не влиял на траекторию движения робота, но достаточен для обнаружения реакции акселерометрами и угломерами.

Уравнения (2-9) дают основу для задачи синтеза ЛКР-регулятора [16, 17], но в них скрыто несколько фундаментальных математических и физических проблем, которые могут привести к тому, что система будет вести себя не так, как ожидается (например, стабилизировать "висячий" маятник вместо перевернутого, или работать только в симуляции, но не на реальном объекте). Физическая реальность такова, что вектор $\mathrm{B}\tau$ в (11) должен иметь отрицательный знак. Иначе система будет всегда находиться в устойчивом равновесии. Это вытекает из того, что стандартная форма уравнений Лагранжа II рода имеет вид (10):

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \nabla\mathbf{V}(\mathbf{q}) = \tau \,, \tag{10}$$

где $\mathbf{V}(\mathbf{q})$ - потенциальная энергия. Отсюда ускорение $\ddot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{M}^{-1}\left(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{q}} + \nabla\boldsymbol{V}\right)$ и видно, что должен быть отрицательный знак.

Вектор управления **Q** может иметь вид:

$$\mathbf{Q} = \begin{vmatrix} 0 \\ \tau \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \tau \\ 0 \end{vmatrix}.$$

В первом случае управляющий момент $\boldsymbol{\tau}$ прикладывается непосредственно к координате $\psi$ (стержню). Во втором случае мотор крутит колесо ($\theta$), а стержень ($\psi$) пассивен. Управление осуществляется за счет инерционной связи. Это соответствует в классической задаче "перевернутый маятник на тележке/колесе", где система

недоактируема. В нашем случае, так как момент $\boldsymbol{\tau}$ действует напрямую на $\psi$, система является полностью актируемой по отношению к задаче стабилизации угла $\psi$. ЛКР конечно здесь избыточен, хватило бы простого PD-регулятора, если бы не стояла цель устойчивости при изменении конфигурации системы.

На рисунках 2, 3 приведены результаты моделирования в системе MATLAB.

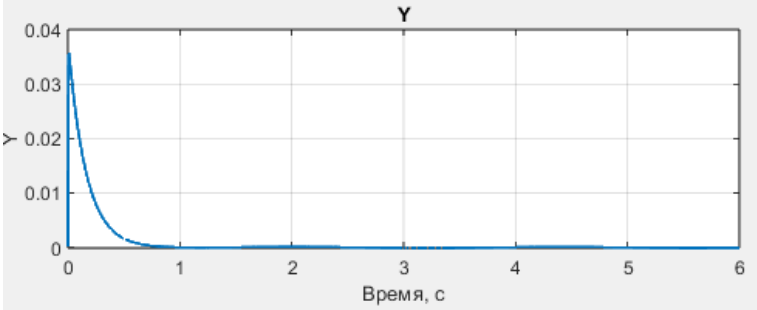


Рис. 2. Положение груза Y

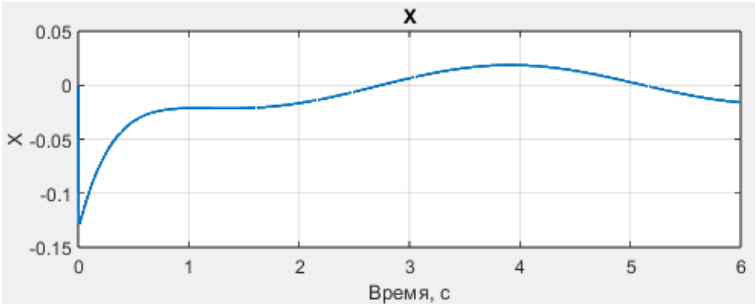


Рис. 3. Положение груза X

**Выводы.** Полученные уравнения могут быть загружены непосредственно в микропроцессорную систему робота через средства MATLAB. Они показывают устойчивую динамику при значительном изменении конфигурации робота в процессе его работы. ЛКР автоматически находит оптимальные коэффициенты обратной связи, учитывая полную динамику системы, что делает его гораздо мощнее ПИД-регуляторов многомерных задачах. Достаточно удовлетворительно управляет системой с нелинейной динамикой (то есть ЛКР применяется как нелинейный регулятор с линейной обратной связью).

## СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Design and dynamic analysis of jumping wheel legged robot in complex terrain environment / T. Guo [et al.] // Frontiers in neurorobotics. – 2022. – V. 16. – P. 1066714. – DOI 10.3389/fnbot.2022.1066714.
2. Wu, K. Research on motion control method of biped wheeled robot on complex terrain environment: master's thesis / K. Wu. – Jinan, Shandong University, 2020. – DOI 10.27272/d.cnki.gshdu.2020.005315.
3. Research on jumping method of two wheeled leg robot based on whole body torque control / X. Ya-Xian [et al.] // Acta Automatica Sinica. – 2023. – V. 49. – P. 1635-1644. – DOI 10.16383/j.aas.c200486.
4. Height control and optimal torque planning for jumping with wheeled bipedal robots / Y. Zhuang [et al.] // Proc. of 6th IEEE Int. Conf. on Adv. Robotics and Mechatronics (ICARM). – 2021. – P.477–482. – DOI 10.1109/ICARM52023.2021.9536196.
5. Optimal energy consumption trajectory planning for mobile robot based on motion control and frequency domain analysis / Z. W. Gao [et al.] // Acta Automatica Sinica. – 2020. – V. 46. – №. 5. – P. 934-945. – DOI10.16383/j.aas.c180399.
6. Зуев, В. М. Динамика прыгающего колесного робота / В. М. Зуев, Д. А. Первенко // Проблемы искусственного интеллекта. – 2026. – № 1(40). – С. 241-253. – DOI 10.24412/2413-7383-2026-1-40-241-253.

7. Innovation at Boston Dynamics [Электронный ресурс]. – URL: bostondynamics.com/about/history/handle (дата обращения 11.11.2025).
8. Franklin, G. F. Feedback Control of Dynamic Systems Pearson Education / G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. – PDF eBook, Global Edition, 2015. – 880 p.
9. Anderson, B. D. Optimal Control: Linear Quadratic Methods / B. D. Anderson, J. B. Moore. – NY: Dover Publicftions, inc. Mineola, 2014. – 448 p. – ISBN 978-0-486-45766-6.
10. Ogata, K. Modern Control Engineering. Fifth Ed / K. Ogata. – Prenttice Hall, 2010. – 894 p.
11. Greenwood, D. T. Classical Dynamics / D. T. Greenwood. – Cambridge University Press, 2003. – 425 p. – ISBN 978-0-521-82612-9.
12. Murray, R. M. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation / R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry. – CRC Press, 1994. – 456 p. – ISBN 978-0849379819.
13. Математическое введение в роботизированные манипуляции [Электронный ресурс]. – URL: https://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki/index.php/Main_Page (дата обращения: 11.11.2025).
14. Khalil, H. K. Nonlinear Systems / H. K. Khalil. – Prentice Hall, 1996. –734 p. – ISBN 0-13-067389-7.
15. Красовский, А. А. Справочник по теории автоматического управления / А. А. Красовский. – М.: Наука, 1987. – 712 с.
16. Летов, А. М. Динамика полета и управление / А. М. Летов. – М.: Наука,1969 – 360 с.
17. Формальский, А. М. Управление движением неустойчивых механических объектов / А. М. Формальский. – Физматлит, 2012. – 232 с. – ISBN 978-5-9221-1460-8.

**REFERENCES LIST**

1. Design and dynamic analysis of jumping wheel legged robot in complex terrain environment / T. Guo [et al.] // Frontiers in neurorobotics. – 2022. – V. 16. – P. 1066714. – DOI 10.3389/fnbot.2022.1066714.
2. Wu, K. Research on motion control method of biped wheeled robot on complex terrain environment: master's thesis / K. Wu. – Jinan, Shandong University, 2020. – DOI 10.27272/d.cnki.gshdu.2020.005315.
3. Research on jumping method of two wheeled leg robot based on whole body torque control / X. Ya-Xian [et al.] // Acta Automatica Sinica. – 2023. – V. 49. – P. 1635-1644. – DOI 10.16383/j.aas.c200486.
4. Height control and optimal torque planning for jumping with wheeled bipedal robots / Y. Zhuang [et al.] // Proc. of 6th IEEE Int. Conf. on Adv. Robotics and Mechatronics (ICARM). – 2021. – P.477–482. – DOI 10.1109/ICARM52023.2021.9536196.
5. Optimal energy consumption trajectory planning for mobile robot based on motion control and frequency domain analysis / Z. W. Gao [et al.] // Acta Automatica Sinica. – 2020. – V. 46. – №. 5. – P. 934-945. – DOI10.16383/j.aas.c180399.
6. Zuev, V. M. Dinamika prygaiushchego kolesnogo robota / V. M. Zuev, D. A. Pervenko // Problemy iskusstvennogo intellekta. – 2026. – № 1(40). – S. 241-253. – DOI 10.24412/2413-7383-2026-1-40-241-253.
7. Innovation at Boston Dynamics [Elektronnyi resurs]. – URL: bostondynamics.com/about/history/handle (data obrashcheniia 11.11.2025).
8. Franklin, G. F. Feedback Control of Dynamic Systems Pearson Education / G. F. Franklin, J. D. Powell, A. Emami-Naeini. – PDF eBook, Global Edition, 2015. – 880 p.
9. Anderson, B. D. Optimal Control: Linear Quadratic Methods / B. D. Anderson, J. B. Moore. – NY: Dover Publicftions, inc. Mineola, 2014. – 448 p. – ISBN 978-0-486-45766-6.
10. Ogata, K. Modern Control Engineering. Fifth Ed / K. Ogata. – Prenttice Hall, 2010. – 894 p.
11. Greenwood, D. T. Classical Dynamics / D. T. Greenwood. – Cambridge University Press, 2003. – 425 p. – ISBN 978-0-521-82612-9.
12. Murray, R. M. A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation / R. M. Murray, Z. Li, S. S. Sastry. – CRC Press, 1994. – 456 p. – ISBN 978-0849379819.
13. Matematicheskoe vvedenie v robotizirovannye manipuliatsii [Elektronnyi resurs]. – URL: https://www.cds.caltech.edu/~murray/mlswiki/index.php/Main_Page (data obrashcheniia: 11.11.2025).
14. Khalil, H. K. Nonlinear Systems / H. K. Khalil. – Prentice Hall, 1996. –734 p. – ISBN 0-13-067389-7.
15. Krasovskii, A. A. Spravochnik po teorii avtomaticheskogo upravleniia / A. A. Krasovskii. – M.: Nauka, 1987. – 712 s.
16. Letov, A. M. Dinamika poleta i upravlenie / A. M. Letov. – M.: Nauka,1969 – 360 s.
17. Formalskii, A. M. Upravlenie dvizheniem neustoichivykh mekhanicheskikh obieektov / A. M. Formalskii. – Fizmatlit, 2012. – 232 s. – ISBN 978-5-9221-1460-8.

*Поступила в редакцию 08.12.2025 г., рекомендована к изданию 19.01.2026 г.*

**STABILIZATION OF THE POSITION OF A WHEELED JUMPING ROBOT**

***Zuev V.M., Pervenko D.A., Nitsenko A.V.***

This paper describes the stabilization of a wheeled jumping robot's position using the LQR method. It is shown that the LQR method can be modified to be self-adjusting to a given target position. This enables position stabilization over a wider range of influences, is more resilient to external factors, and, unlike PID, does not require reconfiguration of the robot when changing system parameters.

***Keywords*:** robot, jumping, wheeled, stabilization.

**Зуев Владимир Михайлович**
научный сотрудник, заведующий отделом ФГБНУ «Институт проблем искусственного интеллекта»,
Российская Федерация, ДНР, г. Донецк.
E-mail: zvm.ipai@mail.ru

**Zuev Vladimir Mikhailovich**
Researcher, Head of the Department of Institute of Artificial Intelligence Problems,
Russian Federation, DPR, Donetsk.
ORCID: 0009-0006-8596-4811

**Первенко Дмитрий Александрович**
лаборант-исследователь ФГБНУ «Институт проблем искусственного интеллекта»,
Российская Федерация, ДНР, г. Донецк.
E-mail: pda.ipai@mail.ru

**Pervenko Dmitrii Aleksandrovich**
Laboratory Researcher of Institute of Artificial Intelligence Problems,
Russian Federation, DPR, Donetsk.
ORCID: 0009-0003-2605-7312

**Ниценко Артем Владимирович**
кандидат технических наук, старший научный сотрудник, заведующий отделом ФГБНУ «Институт проблем искусственного интеллекта»,
Российская Федерация, ДНР, г. Донецк.
E-mail: nav_box@mail.ru

**Nitsenko Artem Vladimirovich**
Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Head of the Department of Institute of Artificial Intelligence Problems,
Russian Federation, DPR, Donetsk.